c. Vérifier que $f(\alpha)=\sin\alpha$.

3. On donne $\alpha\simeq 2{,}34$ et $f(\alpha)\simeq 0{,}72$.

Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. Déduire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha,\pi]$ est une bijection de $[\alpha,\pi]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5. On pose $h(x)=g(x)-2\cos x$, $x\in[0,\pi]$.

Montrer que h admet des primitives sur $[0,\pi]$.

Donner la primitive H de h sur $[0,\pi]$ qui prend la valeur 1 en 0.

20 Pour tout réel x, on pose $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et on désigne par G la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que G est une fonction impaire.

2. a. On pose pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$\psi(x)=G(x)+G\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi(x)=2G(1)$.

b. On pose $u(t)=G(\tan t), t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Calculer $u'(t)$ et en déduire $u(t)$.

3. Déterminer $G(1)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$.

4. Construire la courbe représentative de G dans un repère orthonormé.

21 Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,\sqrt{2}]$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0,\sqrt{2}[$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ par $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ telle que $G(0)=0$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto G(x)+G(-x)$. En déduire que G est impaire.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\sqrt{2}[$, $G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

22 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que

$f(0)=1$, $f(1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x\in]0,1[$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

2. a. Montrer que pour tout x de $[0,\dfrac{\pi}{2}]$,

$f(\cos x)=\dfrac{2}{\pi}x$.

b. En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0,1]$.

3. On pose pour tout x de $[0,\dfrac{\pi}{2}]$,

$h(x)=f(\cos x)+f(\sin x)$.

a. Montrer que h est dérivable sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $h(x)=1$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose

$\varphi_n(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-x^n$, $x\in[0,1]$.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $a_n\in]0,1[$ tel que $\varphi_n(a_n)=0$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,1[$, si $n>p$ alors $\varphi_n(x)>\varphi_p(x)$.

c. En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn